Aprendizaje de las matemáticas como socialización de la mente

Terezinha Nunes*

* Instituto de Educación. Universidad de Londres.

Este artículo ofrece una perspectiva de trabajo teórico integral, en la cual las matemáticas se definen como una práctica cultural. Lo que implica esta definición es que aprender matemáticas es socializarse con las formas del conocimiento usadas por la comunidad de matemáticos y de profesores de matemáticas. Se analizan cuatro aspectos del proceso de socialización: la redescripción de significados para adaptarlos a los sistemas de símbolos aprendidos en matemáticas; la influencia de las conexiones creadas por los profesores en el aula entre los nuevos conceptos y los viejos significados; las consecuencias de usar sistemas de símbolos particulares como mediadores en el razonamiento; el desarrollo de representaciones sociales de lo que son las matemáticas (y el proceso asociado de valoración de métodos específicos) que se plantean en el aula. Se presentan brevemente las implicaciones para aulas multiculturales.

This paper offers an integrated theoretical perspective of work where mathematics is defined as a cultural practice. The implication of this definition is that to learn mathematics is to become socialized into the ways of knowing used in the community of mathematicians and mathematics teachers. Four aspects of the process of socialization are discussed: the redescription of meanings to fit with the systems of signs learned in mathematics, the influence of the connections created by teachers in the classroom between the new concepts and the old meanings, the consequences of using particular systems of signs as mediators in reasoning, and the development of social representations of what mathematics is (and the associated process of valorization of particular methods) which takes place in the classroom. Implications for multicultural classrooms are briefly discussed.

En esta presentación, deseo partir de la idea según la cual la matemática es una práctica cultural, situada en el tiempo y el espacio[1] y definida por la comunidad de matemáticos. Aunque se pueda admitir que esta comunidad es muy reducida, las formas de conocer que desarrollan son de gran valor para muchos, probablemente para todos. *Si la matemática es una práctica cultural, aprender matemática involucra socializarse en esa forma particular de conocer.* Mi intención en esta presentación es discutir el proceso de socialización mental desde una perspectiva psicológica. En este intento, procuraré presentar un punto de vista integrado de las teorías psicológicas y de la investigación, pero no pretendo proporcionar una revisión in extenso de toda la información disponible.

En la primera parte, el tema de la validez del conocimiento como una práctica cultural será examinada desde planteamientos matemáticos más que en forma general. Esta es una sección breve, con el propósito de demostrar que ver la matemática como una práctica cultural no la hace relativista o cuestionable, sino más bien, que requiere una concepción particular de la naturaleza de los significados matemáticos y de los axiomas, la cual ya existe en la comunidad académica. En cada una de las secciones que viene a continuación, se discutirá un aspecto del proceso de socialización. La segunda sección considera la relación entre la vida diaria y los conceptos matemáticos en relación a la solución de problemas. La tercera sección examina la influencia del sistema de signos matemáticos, desarrollados culturalmente, sobre el razonamiento. La cuarta sección discute el proceso social de asignar notas al conocimiento matemático en las aulas, reforzando la concepción de la matemática como una práctica cultural. Finalmente, la presentación concluye con una muy breve discusión de las implicancias de este proceso de socialización para una sociedad multicultural.

---

1. Nótese que "situado", en este texto, no quiere decir que es una forma cognitiva que no puede ser usada en situaciones diferentes, como sucede en algunas de las interpretaciones de la expresión "cognición situada".

1. ¿Es el relativismo una consecuencia de un punto de vista cultural del conocimiento matemático?

La historia de la filosofía está impregnada de amenazas a la validez del conocimiento. Una antigua amenaza parecía provenir de las posturas idealistas y racionalistas, que veían en la mente el origen del conocimiento: si el conocimiento depende de la naturaleza de la mente, parecía difícil demostrar que el conocimiento no era meramente una proyección de la mente. Este escepticismo se aplicaba en mayor medida a las ciencias naturales y la matemática parecía escapar incluso al escepticismo radical de Hume, quien estaba (aunque sólo posteriormente) dispuesto a conceder "a la matemática su certidumbre en vista del argumento que hace referencia no sólo *a hechos reales* sino que únicamente *a relaciones de ideas*. Entre ideas hay relaciones necesarias e inalterables, precisamente porque no dependen de nada que exista en el universo, sino que deben su ser solamente a la actividad del pensamiento" (Cassirer, 1950, p. 24).

Ultimamente, una nueva especie de amenaza a la validez del conocimiento ha sido objeto de discusión, esta vez emergiendo de estudios de sociología del conocimiento. En una de sus formulaciones más conocidas, Thomas Kuhn (1970) ha argumentado vigorosamente que la historia de los desarrollos en la ciencia no puede ser vista como un simple proceso de aproximaciones sucesivas a la verdad, mientras el mundo refuerza directamente nuestro mejor conocimiento de él, debido a nuestro creciente poder de acertar. Los desarrollos científicos son, por el contrario, explicados por la historia de las ideas, las que son desarrolladas, desafiadas y validadas por una comunidad de investigadores, que decide lo que es un problema, lo que necesita ser explicado para comenzar y qué métodos pueden ser acreditados como formas válidas de conocer. La validación de los métodos no es un asunto puramente objetivo y lo que no se reconoce hoy día puede ser reconocido mañana con tanta validez, al igual que lo que no era reconocido ayer puede no ser aceptado hoy. Sin embargo, esta validación tiene un valor simbólico: permite aserciones de tener una opción de validez, que va más allá de la perspectiva particular de aquellas que producen el conocimiento (Glick, 1996). En el fondo de este desafío, está el reconocimiento que el conocimiento no es sólo un producto de la mente, como lo proponen los racionalistas, sino que también un producto cultural, situado en el tiempo y en el espacio y validado por una comunidad que posee suficiente prestigio para validarlo.

¿Puede este nuevo desafío conducir a un relativismo en la matemática? A primera vista podría aparecer que la matemática no puede ser salvada de esta nueva clase de escepticismo: si las ideas matemáticas "deben su ser nada más que a la actividad del pensamiento" y si el pensamiento es influido por la cultura, podría ser que no hay relaciones necesarias e inalterables entre las ideas. Pero me parece que las matemáticas ya habían enfrentado este desafío con la formulación de las geometrías no-euclidianas y habían encontrado una aproximación a la asimilación de una pluralidad de geometrías, que no requiere una forma radical de relativismo.

Las geometrías no-euclidianas fueron vistas, inicialmente, como que colocaban una seria dificultad a la matemática: "reconocer una pluralidadd de geometrías parecía significar renunciar a la unidad de razón" (Cassirer, 1950, p. 24). Pero desarrollos posteriores, tanto en geometrías no-euclidianas como en ideas filosóficas más tarde, dejaron en claro que no era la unidad de razón la que estaba en juicio, sino los puntos iniciales en el razonamiento sobre el espacio:

Las figuras geométricas no deben ser consideradas como absolutas, dadas y fijas de una vez y para siempre en razón de su naturaleza; por el contrario, ellas cambian con las geometrías separadas, porque el modo y el principio de juntarlas decide lo que va a ser considerado como "lo mismo" o como "no lo mismo". En la geometría euclidiana, los triángulos similares, que son distinguibles sólo a través de su posición absoluta en el espacio y por la longitud de sus lados, no son figuras diferentes, sino que una sola figura; desde un punto de vista conceptual, sus diferencias se explican como inconsecuentes o fortuitas. Es obvio que este es un inmenso paso adelante en el pensamiento, comparado con el planteamiento de la percepción común, que reconoce sólo un esto y ahora; vale decir, sólo figuras espacialmente determinadas e individualizadas. Este método de “equivalencia” o definición por abstracción es una de las operaciones fundamentales para el pensamiento matemático en general. Pero tal abstracción puede ir mucho más allá de cualquier uso que se haga de ella en la geometría euclidiana (Cassirer, 1950, p. 33).

En resumen, la solución a la aparente contradicción entre la existencia de varias geometrías y la unidad de la mente fue posible mediante el cambio de significados, tanto de las ideas que vale “tener en cuenta “ y del término “axioma”.

El cambio de las ideas que cuentan se puede ejemplificar en esta cita: “Al pasar de una geometría a otra se ve constantemente el cambio peculiar en significado. Por ejemplo, en la geometría afín ya no hay más asunto de longitud y ángulo. El concepto de los ejes mayores de una sección cónica es eliminado e, igualmente, la distinción entre un círculo y una elipse. Por otra parte, se mantiene la distinción entre la *extensión* finita e *infinita* del espacio y, por consiguiente, todo lo relacionado (Cassirer, 1950, p. 33, cursiva en el original).

Pero un cambio en las ideas que cuentan no fue suficiente; también se requería un cambio en el concepto de axioma:

... el concepto moderno de axioma difiere característicamente del antiguo. Ya no hay más aseveraciones sobre los contenidos que tengan certeza absoluta, ya sea que se conciban como puramente intuitivos o racionales. Son más bien proposiciones del pensamiento, que las predisponen a la acción mediante argucias, que deben ser concebidas en forma tan amplia e inclusiva para que queden abiertas a cualquier aplicación concreta, que uno desee hacer de ellas en el campo del conocimiento. Si uno acepta este sentido de los “axiomas”, que se planteó por primera vez en forma clara en la moderna lógica de las matemáticas, entonces el conflicto sobre la verdad de los diferentes sistemas de axiomas de la geometría se hará fútil, porque estos sistemas no pretenden resolver cuestiones ontológicas. No intentan representar un cierto objeto llamado “espacio”, ya sea trascendente o fenoménico, ya que las representaciones necesariamente entrarían en conflicto. Los axiomas no son cuadros sino que patrones, en el sentido que ellos no describen ninguna cosa dada sino que son diseños o planes para completación futura (Cassirer, 1950, pp. 45-46).

Estas dos ideas –lo que es y no es lo mismo puede definirse en un sistema (y no necesita ser dado desde la intuición) y que los axiomas no necesitan ser auto-evidentes sino que a través de artificios que preparan la mente para la acción- aclaran por qué las matemáticas, vistas como una práctica cultural, no se agregan directamente al relativismo. Del mismo modo como uno puede ser llevado a ignorar la forma si ésta es considerada irrelevante para una tarea particular, aunque continuemos viendo triángulos y cuadrados como algo diferente, podemos ser socializados en las matemáticas al tratar como "lo mismo" muchas cosas que inicialmente vimos como diferentes para propósitos de formas particulares de conocer o resolver problemas. La coherencia de razonar es dada por las invariantes relevantes en el sistema: sólo esas propiedades que permanecen invariantes cuando las transformaciones son llevadas a cabo, definen equivalencia. De este modo, el concepto de invarianza es fundamental para establecer un enfoque de las matemáticas que no sea relativista y que sin embargo, acomode una pluralidad de geometrías –o, para ponerlo de modo más general, las prácticas matemáticas partiendo de una pluralidad de axiomas–.

2. La socialización de significados en conceptos matemáticos

Cuando los niños comienzan a aprender matemáticas en la escuela, evidentemente no son mentes vacías. Traen a la clase de matemática significados que asignarán a los sistemas de signos matemáticos que se les enseñen. La tesis central de Piaget era que los significados básicos de los conceptos matemáticos emergen de los esquemas de acciones de los niños, esto es, acciones generalizables y estructuradas, que pueden aplicarse a una variedad de objetos y las cuales se centran en las relaciones entre objetos y sus transformaciones, más que en los objetos en sí. Los niños pueden comparar, ordenar cosas, unir y separar, contar de diversas formas para resolver problemas, hacer correspondencias, etc., y estos esquemas de acción proporcionarán los primeros significados para los signos matemáticos que se enseñen en la escuela.

La naturaleza lógico-matemática de los esquemas de acción queda demostrada por la habilidad de los niños para hacer deducciones en ausencia de información perceptual. Por ejemplo, Frydman *y* Bryant (1988) han demostrado que los niños de cinco años, sin contar los conjuntos o hacer nuevas comparaciones, pueden concluir que dos conjuntos tienen *el* mismo número si ellos compartieron los conjuntos sobre la base de uno-para-ti y uno-para-mí. La acción de compartir es suficiente para establecer la igualdad. Más recientemente, Kornilaki (en Nunes y Bryant, 1996) ha demostrado que incluso niños pequeños pueden entender el ordenamiento de conjuntos sobre la base de diferentes proporciones de un conjunto de comparación: si se les pide que imaginen que hay dos bolsas de dulces dentro de cada uno de cinco vagones en un grupo y tres bolsas dentro de cada uno de los cinco vagones en un segundo grupo, concluyen que hay más bolsas de dulces dentro del segundo grupo.

Como Piaget sugirió, los esquemas de acción de los niños podrían formar la base de futuras relaciones. Sin embargo, falta un elemento significativo en esta teoría: cuando los niños llegan al colegio, ya ha comenzado el proceso de socialización de los significados matemáticos mediante sistemas colectivos de signos. Incluso antes de iniciar la escuela, muchos niños han empezado a contar. Todos contamos usando el sistema de numeración oral disponible en nuestra cultura y los niños hacen progresos mayores o menores para dominar el sistema de contar transmitido culturalmente como una función de la dificultad del sistema. La investigación ha demostrado que los niños que aprenden a contar en japonés, no sólo aprenden las palabras para contar más rápido, sino que también comprenden la estructura de base diez antes que los niños que aprenden a contar en inglés y esta diferencia ha sido atribuida a la regularidad del sistema de numeración japonesa (ver, por ejemplo, Miura et al., 1994) Trabajos recientes han demostrado este efecto de regularidad incluso entre niños que asisten a los mismos colegios y que viven en las mismas aldeas: niños de habla galesa, que usan un sistema *de* contar regular, aprenden a contar más rápido y comprenden el sistema de base diez a una edad más temprana que los de habla inglesa (McLean et al., 1996). La socialización del pensamiento involucrado en el uso de sistemas de numeración puede ser reconocido con facilidad cuando tratamos de responder preguntas tales como: ¿Cuántas decenas hay en 238?, ¿cuántas veces cabe 7 en esa cifra?. Mientras la primera pregunta es muy fácil ya que prácticamente podemos ver las 23 decenas, la segunda pregunta sólo puede responderse después de una pausa, en la cual calculamos.

La socialización de los significados matemáticos no está restringida a contar. Hay muchas palabras que los niños aprenden antes de la escuela, que también tienen relación con el aprendizaje matemático. Como lo señaló Walkerdine (1988), la palabra "más" es usada a menudo por los niños en el contexto de pedir más chocolate, por ejemplo, y adquiere un significado que no se equipara al que se pretende en algunas situaciones escolares, tales como los problemas de comparación (para una variedad de ejemplos de usos de términos en la vida diaria, con un significado distinto del que se le asigna en la escuela, ver Pimm, 1987)[2].

En síntesis, hay una vasta literatura que muestra que los jóvenes son capaces de hacer deducciones de naturaleza lógico-matemática sobre la base de esquemas de acción y usar estos esquemas en coordinación con sistemas colectivos de signos, tales como contar o el lenguaje oral. Los esquemas de acción y los sistemas de signos que los aprendices traen al colegio formarán la base de conocimiento con la cual aprenderán matemáticas en el colegio. Pero los esquemas de acción no corresponden en forma directa con los significados que deben atribuirse a signos matemáticos tales como +, -, o = en la escuela. Como lo hizo notar Andre Giordan (1989), cuando los alumnos asimilan información del mundo exterior, incluyendo lo que se les

2. Walkerdine nos recuerda incluso que, en este proceso de socialización, las mismas expresiones llegan a adquirir diferentes significados simbólicos en grupos diversos dentro de la misma cultura, un aspecto de particular interés cuando la clase de matemática es multicultural. Este aspecto será tratado en la sección 4.

enseña en clases, no puede haber un simple proceso de equiparar los viejos significados con los nuevos signos: "un nuevo elemento no se inscribe por sí mismo directamente en la línea del conocimiento anterior" (Giordan, 1989, pp.251). Esto significa que los significados conocidos constituyen una base para el aprendizaje, pero también un obstáculo [un obstáculo epistemológico, para usar la expresión de Bachelard (1938)]: los significados necesitan ser cambiados, para ser socializados de acuerdo al sistema de signos que los niños están aprendiendo en la clase de matemática.

El proceso de socialización de los significados diarios en conceptos matemáticos puede ser denominado, siguiendo a Annette Karmiloff-Smith (1993), un proceso de redescripción representacional. Usaré el término "redescripción" aquí con un significado ligeramente diferente que el propuesto por Karmiloff-Smith, para enfatizar el hecho que los significados que se derivan de los esquemas de acción son reformulados -esto es, redescritos- cuando los aprendices establecen una conexión entre sus antiguos significados y los nuevos sistemas de signos aprendidos en la clase. Aunque "redescripción" es un término cognitivo, los procesos que conducen a la redescripción en el aprendizaje matemático son sociales en naturaleza, tanto porque los sistemas de representación a ser aprendidos son convencionales, como también porque el aprendizaje es logrado en una interacción social, donde los profesores promueven en la clase ciertas conexiones entre los nuevos signos y los viejos significados, más que otras que también podrían ser posibles. Estos dos aspectos están ilustrados en la sección que sigue.

La socialización a través del aprendizaje de signos convencionales para las operaciones.

Un tipo de redescripción de significados involucra comprimir diferentes esquemas de acción en un sistema simplificado de representación con menores opciones. Por ejemplo, todos los diferentes esquemas de acción relacionados con las estructuras aditivas pueden ser representados en la expresión a+b=c y las formas involucradas c-a=b y c-b=a. Esta expresión puede significar una transformación (aumentará sumando b), una diferencia estática (c es b más que a), la unión de conjuntos (a y b ambos considerados), etc. Para que los signos de substracción y adición se relacionen con estos significados diferentes, es necesaria una redescripción representacional: los esquemas de acción que fueron vistos como diferentes, deben ser tratados como "lo mismo".

Una serie de bien documentados ejemplos acerca de la dificultad de esta redescripción proviene de la investigación sobre resolución de problemas de los niños. Cuando ellos aprenden representaciones aritméticas en el colegio, no hay un apareo simple entre sus esquemas de acción y los signos matemáticos que aprenden. Primero, los esquemas de acción no pueden usarse en los números porque éstos ofrecen una representación comprimida de los objetos (8 en una representación de ocho objetos individuales que pueden ser contados, separados en conjuntos, etc. cuando son individualizados). Más aún, la labor realizada por varios esquemas de acción necesita ser ejecutada por dos operaciones aritméticas en los primeros años escolares: adición y substracción. Varios estudios sobre estas operaciones han demostrado el punto: los niños son capaces de resolver un problema usando esquemas de acción, sin saber cual operación aritmética es adecuada para calcular el resultado formalmente. Hudson (1983), por ejemplo, ha demostrado que los niños pueden resolver problemas que involucran comparaciones entre conjuntos cuando pueden utilizar sus esquemas de contar. Si se les pone el siguiente problema: "Hay 6 niños y 4 globos: ¿cuántos niños no van a recibir globos?" y se les muestra imágenes de los niños y de los globos frente a ellos, los niños de cinco años típicamente van a contar los globos y luego contar los niños hasta el 4 (es decir, los niños para los cuales hay globos) y luego contarán los niños que quedan. Sin embargo, los mismos niños no pueden indicar cual operación aritmética podría usarse para resolver este problema.

Este desencuentro entre la habilidad para resolver problemas mediante esquemas de acción y mediante representaciones formales ha sido documentada una y otra vez en la literatura respecto a niños (ver, por ejemplo, Marton y Neuman, 1990; Nunes y Bryant, 1996;

Nunes y Moreno, 1996) así como tambien ha sido documentada en trabajo con adultos sin escolaridad (Nunes, 1992), cuyos esquemas de razonamiento no han sido socializados en las formas particulares prescritas por la escuela (estoy usando la expresión “esquemas de razonamiento” para referirme a maneras de resolver problemas que, a diferencia de los esquemas de acción, pueden ser aplicados a representaciones comprimidas, tales como los números). Los adultos sin escolaridad, que son perfectamente capaces de resolver una variedad de problemas aritméticos en la vida diaria, mostraron marcada dificultad cuando se les pidió que resolvieran problemas carentes de sumando usando una calculadora. Para poder usar este artefacto, uno debe ingresar las representaciones formales como series de comandos (Ej. 93-29). Por ejemplo, la calculadora no trabaja soluciones que involucran contar desde el primer sumando hasta el valor total, cuando resuelve un problema con el sumando omitido.

Por ejemplo, el trabajo llevado a cabo con adultos sin escolaridad por mí misma y mis anteriores colegas Analucia Schliemann y David Carraher, en Brasil, y por Sylvia Scribner y sus colegas en lugares de trabajo en los Estados Unidos, ha mostrado que la socialización de esquemas de razonamiento también tiene lugar fuera de la escuela, cuando los adultos están involucrados en prácticas particulares que involucran cálculo. Estos estudios documentaron la reformulación del pensamiento por otras prácticas culturales distintas de la escuela y, correspondientemente, la gran variedad de soluciones que no podrían ser buenos pareamientos para las formas particulares de representar soluciones a los problemas utilizados en la escuela. Los envasadores de leche de Scribner, por ejemplo, parecían razonar usando una base de razonamiento de 16, aunque contaban en inglés, porque las cajas en que tenían que pensar todo el tiempo contenían 16 unidades (Scribner, 1986). Ellos se socializaron en este modo de pensar en su lugar de trabajo y los graduados de secundaria, que no se habían socializado en él, mostraron soluciones mucho menos eficientes para el mismo tipo de problema.

Los estudios de adultos con escasa o nula escolaridad también demostraron que los procedimientos usados en la matemática de la calle (esto es, la matemática usada fuera del colegio) se apoya claramente en los invariantes que son relevantes para la simplificación de pasos en el cálculo. En la aritmética oral, usada típicamente en la matemática callejera, se demostró que los procedimientos de adición y sustracción estaban basados en la propiedad de asociatividad y que los procedimientos de multiplicación y división estaban basados en la distributividad (ver Nunes, Schliemann, y Carraher, 1993, para discusión posterior). Considerando que estas son las mismas invariantes que permiten que los cálculos procedan de manera algorítmica basados en los números escritos que se enseñan en la escuela, se puede concluir que la calle, el lugar de trabajo y la escuela socializan a los aprendices en prácticas diferentes, que son, sin embargo, matemáticamente equivalentes, incluso si son psicológica y culturalmente distintas.

Socialización mediante las conexiones particulares entre signos y significados promovidos en la escuela.

Cuando se introducen conceptos matemáticos en la sala de clases, los profesores tienen que escoger un contexto en el cual se introduce el concepto. Este puede ser creado mediante situaciones problemas presentadas en forma oral, mediante referencias a otros conceptos, a través de dibujos, diagramas, etc. Cualquiera que sea el medio, los profesores necesitan facilitar una conexión entre el nuevo concepto que se está enseñando y algo que los alumnos saben de antemano. Se crea socialmente la conexión en la clase y el profesor, en principio, tiene muchas opciones (aunque los profesores puede que no estén conscientes de las diferentes posibilidades).

Como ocurra la reformulación de antiguos significados para adecuarse a un nuevo concepto matemático, depende de cómo se introduzca el concepto y cómo se use en la clase. Por ejemplo, es muy fácil (y una práctica muy corriente) enseñar multiplicación a los niños conectándola a la adición repetida. Los niños comprenden sin dificultad que si ellos suman, por ejemplo, 5 tres veces, esto puede simplificarse como “tres cincos” o “tres veces cinco”. Esta conexión entre mutiplicación y adición da a los niños una estrategia para el cálculo -pueden resolver sumas de multiplicación mediante adición repetida- y les permite conectar el nuevo concepto con algo familiar. Sin embargo, el precio de este sendero particular, en la socialización del pensamiento de los niños, puede ser que el significado que los jóvenes conectan con la multiplicación necesitará mucha re-descripción para que puedan progresar más allá de las etapas iniciales, porque siempre hay invariantes en el concepto de multiplicación que no son parte del concepto de adición. Es posible que los niños comprendan algo de estas invariantes, pero que no puedan anclar el nuevo concepto en sus esquemas de acción más relevantes, porque estos esquemas no fueron evocados en la clase.

Peter Bryant y yo (Nunes y Bryant, 1996), hemos planteado la hipótesis que el significado básico para la comprensión de la multiplicación en los niños debiera buscarse en un esquema de acción muy diferente del que se usó en la adición: el esquema de correspondencia uno-a-muchos. Cuando tratamos la multiplicación como una adición repetida, las ideas de correspondencia y pares ordenados no son consideradas y puede que no sean representadas en forma alguna por el aprendiz. Las dificultades que encuentran los niños para reformular este concepto inicial de multiplicación ha sido documentado por muchos investigadores y no necesita ser discutido aquí.

Al revés de los que aprenden en la escuela, quienes han sido socializados en el concepto de multiplicación como adición repetida, supervisores de construcción y pescadores con muy poca escolaridad (ver Nunes, Schliemann y Carraher, 1993), quienes aprenden sobre la multiplicación en su vida diaria, parecen anclar su comprensión de las relaciones multiplicativas en el esquema de rezonamiento uno-a-muchos. Cuando los supervisores, por ejemplo, razonan sobre llevar a una construcción real el tamaño de una muralla, a partir de un dibujo a escala, ellos claramente hablan sobre qué valor en el papel corresponde a qué valor en la construcción. Aunque ellos resuelven muchas multiplicaciones usando la adición repetida, no confunden la adición con la multiplicación y continuamente se refieren a la correspondencia entre variables durante sus cálculos. Los niños que eran buenos usuaríos de la matemática de la calle también hacían de esta manera sus cálculos de multiplicación. En un ejemplo muy notable en relación a la correspondencia entre dos variables, a M., un muchacho de 12 años que estudió sólo hasta tercer grado en el colegio (que es cuando la multiplicación y la división se introducen por primera vez en las escuelas brasileñas), se le preguntó cuál sería el costo de diez cocos, después de informarnos que el precio de cada coco era de 35 cruceiros (moneda brasileña). Su respuesta fue: " Tres serán ciento cinco; con tres más, serán doscientos diez [pausa]. Necesito cuatro más. Eso es... [pausa] trescientos quince...Pienso que son trescientos cincuenta" (en Nunes, Schliemann y Carraher, 1993, p.19). Otros ejemplos de este razonamiento fueron documentados por Saxe (1991).

Este tipo de razonamiento se describe mejor como "réplicas" (para usar la terminología de Kieren, 1994) de la relación original uno-a-muchos, y la réplica es un procedimiento que mantiene la proporción, una invariante significativa en situaciones de multiplicación, mientras que los esquemas de adición simple no involucran dos variables de este mismo modo. La fuerza de la conexión que hicieron tanto los pescadores como los supervisores en la correspondencia uno-a-muchos del esquema de razonamiento, queda demostrada por su persistencia en usar el razonamiento escalar complejo, cuando una solución funcional habría sido más bien simple para el mismo problema.

Douady (1996), al discutir su ingeniería didáctica para introducir el álgebra, establece un punto similar en relación a las elecciones que quedan abiertas a los profesores cuando introducen el álgebra por primera vez. Ella sugiere que los profesores a menudo toman el camino fácil al presentar el álgebra como: "es igual que la aritmética, pero hecho con letras". Ella indica que esta elección requerirá mucha redescripción de los significados de los niños, si se desea que ellos hagan progresos en álgebra posteriormente. Streefland (1990a) ha señalado también que la enseñanza de las fracciones se hace a menudo conectando fracciones con números enteros, de modo que permita a los alumnos usar pronto el lenguaje de las fracciones en la clase. A los alumnos se les enseña que las fracciones son las partes sombreadas de una figura que ha sido dividida en partes iguales. Todo lo que necesitan aprender para usar el lenguaje de las fracciones es un procedimiento de conteo doble: el número de partes sombreadas indica el numerador y el número total de partes es el denominador. Streefland sugiere que esta conexión particular entre el nuevo concepto y los antiguos significados no resulta a la larga. Propone que una ruta mejor, en el proceso de socialización de antiguos significados en nuevos conceptos de fracciones, es establecer una conexión inicial entre dividendos mayores que uno y los divisores con representación fraccional. Los aprendices serán capaces, entonces, de usar sus esquemas de partición para establecer equivalencias tales como 4 dividido por 8 es lo mismo que 3 dividido por 6 porque cada persona obtiene una mitad" –un esquema disponible para niños de siete años de edad para arriba(Desli y Nunes, 1996).

Para resumir: aprender matemática en clases es un proceso de socialización de significados antiguos en los nuevos conceptos característicos de las prácticas matemáticas. Este proceso involucra reformulación o redescripción, porque no hay una inscripción simple de los antiguos significados en los nuevos conceptos. Las elecciones que hacen los profesores para guiar este proceso de socialización en la clase tiene un impacto sobre cuáles redescripciones son hechas en qué punto del tiempo durante el proceso de aprendizaje. Hay alguna evidencia relativa a que los conceptos desarrollados dentro y fuera de la escuela pueden ser diferentes como consecuencia de este proceso de socialización. Los empacadores de leche de Scribner, por ejemplo, eran diestros en usar una base de 16 para calcular, como consecuencia de participar en prácticas donde el número 16 era una unidad significativa para la composición. Los supervisores y los pescadores con escasa escolaridad parecían haber asociado su concepto de multiplicación al esquema de razonamiento de correspondencia uno-a-muchos, resolviendo problemas por réplica y razonamiento escalar más que por razonamiento funcional, incluso si este último hubiera sido una suma mucho más simple. A pesar de las diferencias, los invariantes sobre los cuales ya han comenzado los conceptos que se usan dentro y fuera de la escuela son los mismos, y los procedimientos son matemáticamente equivalentes.

Aunque la evidencia acumulada hasta aquí es impresionante, se necesita mucha más investigación en el aula si deseamos comprender mejor este proceso de socialización de los significados diarios en conceptos matemáticos. Los experimentos de enseñanza, que analizan las conexiones específicas establecidas inicialmente por los profesores para reformular los antiguos significados de los aprendices, son particularmente importantes. Es muy probable que cualquier conexión simple a algún tipo de significado antiguo, tenga como resultado conceptos restringidos y que las conexiones múltiples debieran quedar establecidas tan pronto como sea posible por los aprendices.

Los profesores que trabajan en una clase multicultural necesitan particularmente estar conscientes de las prácticas en que participan sus alumnos fuera de la escuela. Los alumnos de diferentes grupos podrían estarse apoyando en bases de conocimiento más bien diferentes, mediante el aprendizaje de diferentes idiomas en casa y la participación de diferentes prácticas culturales de relevancia para la clase de matemática en sus propias comunidades.

En esta sección, se discutió la socialización de significados mediante la introducción de sistemas de signos en la clase de matemática. En la sección que sigue se discutirá un aspecto diferente del sistema de signos, vale decir, su función cuando se transforman en herramientas de pensamiento.

3. Los signos matemáticos como herramientas de pensamiento

Pareciera que los sistemas de signos desempeñan tres roles diferentes en el raciocinio: 1) un rol capacitador; 2) un rol restrictivo; y 3) un rol estructurador. Cada uno de ellos será discutido brevemente en sucesión.

El rol capacitador del sistema de signos

La función capacitadora del sistema de signos en el dominio de los conceptos matemáticos se reconoce tan fácilmente, que aquí sólo se mencionará un solo ejemplo de una actividad matemática muy elemental, relacionado con la medición. Nuestra percepción de longitud, por ejemplo, está sujeta a toda clase de ilusiones. En el caso de la muy conocida ilusión de Muller-Lyer, por ejemplo, tenemos dificultades en comparar dos segmentos de líneas que se presentan en relación muy cercana. Nuestra percepción también está sujeta a una ilusión de constancia de tamaño, por la cual sobreestimamos el tamaño de los objetos a la distancia, como es el caso de la muy conocida ilusión del tamaño de la luna, la que percibimos como que tiene tamaños variables a medida que transcurre la noche. Nuestro recuerdo de la longitud también es limitado y no seríamos capaces de mirar una ventana e ir luego a una tienda a comprar la cantidad exacta de material para hacerle una cortina. Más aún: la percepción de la longitud es subjetiva en el sentido que gente diferente puede no estar de acuerdo en sus juicios para la longitud en una misma situación. Por ejemplo, en el caso de la ilusión Muller-Lyer, diferentes sujetos muestran diferentes niveles de ilusión y no se podría observar acuerdo entre los sujetos cuando se les pidiera estimar el tamaño de la diferencia entre los segmentos de la línea. Las culturas han desarrollado, a través del curso de la historia, sistemas de medición que permiten que sus usuarios superen sus limitaciones perceptuales, mnemotécnicas e, incluso, intersubjetivas. Aunque no podamos ver mejor, podemos medir los segmentos de líneas en la ilusión de Muller-Lyer y verificar que los segmentos de la línea tienen la misma longitud.

El rol capacitador de los signos matemáticos es claramente fundamental para las actividades matemáticas en nuestra vida diaria dentro y fuera de la escuela.

El rol restrictivo del sistema de signos

Los sistemas de signos en la matemática, una vez aprendidos, pueden transformarse en objetos que aplicamos a nuestro razonamiento, del mismo modo que anteriormente los niños aplican sus esquemas de acción a objetos reales o símbolos que representan objetos. Como los esquemas de razonamiento se aplican a los sistemas de signos, las características del sistema tienen impacto en el razonamiento. Por ejemplo, al escribir números con el sistema hindú-arábigo de valor de posición, nosotros podernos fácilmente hacer adiciones o substracciones por columnas. Por contraste, no podemos realizar el mismo algoritmo con números escritos con numerales romanos. Aunque las propiedades de los números no son diferentes si se les representa con numerales hindú-arábigos o romanos, el tipo de algoritmo que podemos realizar es influido por la representación.

Nuestros estudios (ver Nunes, Schlieman y Carraher, 1993) sobre la aritmética escrita y oral han documentado muy claramente el impacto del sistema de signos sobre el razonamiento. Los estudios fueron llevados a cabo en Brasil, donde los niños de clase obrera son expuestos a las dos clases de aritmética, una oral y otra escrita.

La aritmética escrita se enseña en la escuela. Aunque los niños necesitan representar los términos de la adición por sí mismos (ya sea de memoria o contando con los dedos), la práctica aritmética que usan se caracteriza como escrita debido al rol restrictivo y directivo desempeñado por los símbolos escritos durante el cálculo. Cuando se lleva a cabo la adición, por ejemplo, una vez que los números son escritos, el usuario del sistema parece dejar de pensar en los valores como un todo. Los dígitos se agregan de derecha a izquierda. El cálculo puede ser realizado de este modo debido a que el valor relativo del dígito ha sido “descargado” (para usar la terminología de Hatano, 1996) en el papel. Será recuperado más tarde, cuando se lea el resultado, esta vez de izquierda a derecha. Los cálculos de papel y lápiz explotan las características espaciales del sistema: la adición es llevada a cabo por columnas, que deben estar alineadas adecuadamente para que el resultado sea correcto. Esta es, en realidad, una fuente de dificultad para los niños en las etapas iniciales del aprendizaje, porque los niños puede que no respeten una disposición en columnas o dispongan la columna de izquierda a derecha, usando la dirección en que se escriben los números, como guía. Otra característica del algoritmo escrito es que todos los dígitos se tratan de igual manera, independientemente de su lugar en el número, y los resultados parciales se escriben permitiendo que se superen rápidamente las restricciones de la memoria.

Las consecuencias de estas características conducen a la predicción de fortalezas y debilidades en la ejecución del cálculo, como consecuencia del uso de algoritmos escritos. La fortaleza reside en el hecho que se puede operar tanto con números muy grandes como con listas largas de números, con poco esfuerzo relativo. Por ejemplo, nosotros podemos sumar listas de números que no podríamos memorizar, usando este algoritmo. La debilidad yace en los tipos de error esperados en la aritmética escrita. Calcular de izquierda a derecha significa que el valor de un error se magnifica a medida que se avanza en el cálculo. Calcular sobre la base de dígitos, sin considerar la cantidad que representa el número, también conduce a un debilitamiento en el control de resultados parciales durante el cálculo.

En contraste con la aritmética escrita, la aritmética oral no se enseña sistemáticamente en las escuelas brasileñas, sino que más bien se aprende en situaciones de la vida diaria, tal como es comprar. La aritmética oral favorece el proceso de control de resultados, porque las referencias a las cantidades permanecen explícitas a través del proceso de cálculo. Este es llevado a cabo desde pequeñas a grandes cantidades y es monitoreado continuamente a través del proceso.

Para ilustrar ésto, la solución típica a un problema de adición tal como 230+150, en aritmética oral sería: "doscientos treinta, más cien, trescientos treinta; más cincuenta, trescientos ochenta." De manera similar, en una substracción tal como 200-35, la solución típica es "doscientos menos treinta, ciento setenta; menos 5, ciento sesenta y cinco". Un ejemplo final puede darse en un problema de división, donde un niño resuelve el problema de distribuir 75 bolitas en partes iguales entre cinco niños: "Dar diez bolitas a cada uno, eso es cincuenta bolitas. Quedan veinticinco para repartir entre cinco niños. (...) Eso es, cinco más a cada uno, es quince a cada uno" (Nunes, Schliemann, y Carraher, 1993).

La aritmética oral, al igual que la práctica escrita, tiene fortalezas y debilidades. Es difícil usar la matemática oral con números muy grandes y con listas largas, y ésta es una debilidad mayor. Sin embargo, el hecho que el significado se mantenga durante el cálculo, fortalece el proceso de control del mismo. Cuando se cometen errores, se espera que sean menores.

Las debilidades de la aritmética escrita, en contraste con la aritmética oral, se observaron en estudios que utilizaron un diseño intersujetos, en los cuales los mismos niños resolvían problemas usando ya sea la aritmética oral o la escrita en ocasiones diferentes, y un diseño entre-sujetos, donde a sujetos usuarios de la aritmética oral, con poca instrucción formal (pequeños productores rurales, supervisores en obras de construcción, pescadores), se les comparaba con estudiantes que utilizaban más bien las prácticas de la aritmética escrita. El uso de prácticas orales llevó a un número significativamente menor de errores en cualquiera de las cuatro operaciones. Al observarse errores, se comprobó que los originados por la aritmética oral eran relativamente menores que los originados por la aritmética escrita, como quedó demostrado por una asociación significativa entre el tipo de procedimiento aritmético usado y el tamaño relativo del error (Nunes, Schliemann y Carraher, 1993).

Otro estudio en que se contrastó la aritmética oral y escrita fue llevado a cabo por Nunes (1993) con problemas de números "redondos", en los que el cálculo desempeñaba un rol menor, sino que más bien monitoreaba el proceso de resolución de problemas, manteniendo su significado en la mente era muy importante (?). Los valores usados eran todos décimas simples (ej. 40, 30, 20); el asunto importante para el que resolvía el problema era si sumar o restar los números. En la aritmética escrita, los que resuelven problemas tienen que enfrentar el hecho que -20 y -30 necesitan ser sumados juntos aunque vayan precedidos por el signo menos(-), el cual, bajo otras circunstancias, indicaría substracción. En la aritmética oral, donde los números y las operaciones no están representadas en forma escrita, la elección de operación no debiera estar influida por dificultades que emergen de la anotación escrita.

En este estudio, se asignó a niños y adolescentes de tres niveles de escolaridad condiciones de prueba ya sea oral o escrita y se presentó oralmente los mismos problemas de números "redondos". Todos los problemas eran relativos a ganancias y pérdidas de un granjero hipotético en sus diferentes tipos de cosecha, situación que era familiar para todos los sujetos. A los que se les asignó la condición escrita, se les pidió que registraran los números antes de resolver los problemas y a los que se les asignaba la condición oral, no tenían papel y lápiz disponible en la situación de prueba.

Los sujetos en la condición oral se desempeñaron significativamente mejor que los que tenían asignada la condición escrita.

Un análisis de los errores presentes en la condición escrita indicó que ellos surgieron de un conflicto entre dos prácticas de aritmética escrita, que los sujetos habían aprendido en el colegio. Este conflicto involucraba (al menos) dos reglas mayores. Primero, en la aritmética escrita que se enseña en relación a números directos, los signos indican las operaciones y se les enseña a los niños que necesitan ejecutar diferentes operaciones separadamente. Por ejemplo, ellos no debieran, sumar y restar usando un algoritmo simple. Cuando se introducen los números directos, ya no se usan los signos para representar operaciones, porque dos números negativos pueden ser sumados o un número positivo puede ser restado de uno negativo. Segundo, cuando los sujetos usan los signos de más y menos para representar una operación, ellos no pueden escribir el signo de la operación después de la presentación de la primera cifra en el problema, sino que sólo después que la segunda cifra ha sido presentada. En una etapa tan temprana de la presentación del problema, los sujetos aún no pueden saber qué operación necesitarán llevar a cabo y deben esperar posterior información para saber cuál debiera ser el signo.

Por consiguiente, se espera que los errores típicos en las soluciones de problemas de números "redondos", sean de dos clases. En el primer tipo de error, se espera que los sujetos de la condición escrita fallen en escribir si la primera cifra del problema es positiva o negativa. La operación dependerá de si la segunda cifra indica una deuda o una ganancia y deben esperar hasta que hayan obtenido esta información para escribir el signo. Un segundo tipo de error involucra llevar a cabo la operación indicada por el signo, independientemente de si dos deudas se presentan consecutivamente. Esto podría resultar, por ejemplo, en sustraer un número negativo de otro, en vez de sumarlos. Estos fueron los tipos de errores observados por Nunes(1993).

Las dificultades de los sujetos con la aritmética escrita, al resolver problemas de números "redondos", no pueden ser atribuidas simplemente a una falta de comprensión de problemas de números dirigidos, por las siguientes razones. Primero, debe recordarse que los sujetos fueron asignados al azar a la condición oral o escrita y que los sujetos de la condición oral se desempeñaron casi al nivel máximo. La asignación al azar se asume para controlar las capacidades de los sujetos. Segundo, los sujetos de la condición escrita a menudo fueron capaces de darse cuenta de que habían cometido un error cuando se les pedía que explicaran cómo llegaron al resultado. Ellos se autocorregían durante esta explicación oral y concluían diciendo "No puedo hacerlo en el papel. Sólo puedo en mi cabeza". Por ejemplo, se le dio el siguiente problema a J.C.: "Seu Severino (el nombre del granjero) inició la estación con una deuda de 10 cruzados (moneda brasileña de la época). Plantó frijoles y mandioca. Tuvo una ganancia de 20 en la mandioca y una de 10 en los frijoles. ¿Cuál era su situación al final del año?" J.C. escribió 10 sin signo (error de primer tipo), más 20 debajo (una ganancia requiere un signo más), y luego 10 en una tercera fila debajo del 20 sin un nuevo signo. Sumó todos los números y escribió 40 como respuesta. Sin embargo, cuando se le preguntó si 40 era ganancia o pérdida, una pregunta de rutina cuando los sujetos no indican la dirección del valor, J.C. respondió: "No, no es eso. No puedo hacerlo en papel. Sacó su ganancia de los frijoles, pagó los 10 que debía y aún tiene 20 de la mandioca".

En resumen, el contraste entre la aritmética oral y la escrita ilustra cómo el sistema de signos y las prácticas culturales que les son pertinentes restringen el raciocinio de los sujetos durante la ejecución. Cuando el sujeto es capaz de salirse de un sistema y usar el otro, puede observarse un proceso de raciocinio diferente. Estos cambios en el razonamiento no pueden ser considerados sin atribuir un rol constrictivo al sistema de signos usados en el raciocinio mediador.

Un sistema de signos diferente en el cual se trabaja la aritmética es el ábaco. Los estudios de aritmética en ábaco revelan el mismo fenómeno: el desempeño de los sujetos durante el cálculo es restringido directamente por el sistema de signos que se usen. Hatano (1996) revisó recientemente la literatura relativa a la aritmética del ábaco y describió las características de su uso por los grandes maestros. Los grandes maestros parece que desarrollan una representación espacial, mental del ábaco, que opera como un "ábaco mental". La investigación indica que esta representación interna es espacial (y así resguarda las características del sistema externo de signos) por diferentes razones. Primero, los grandes maestros pueden llevar a cabo cálculos mientras responden a preguntas simples, un hallazgo que indica que la interferencia verbal no es significativa. Sin embargo, si se les pide que miren un gráfico, su desempeño se interrumpe, un hallazgo que indica que la interferencia espacial es significativa. Otra indicación de que el ábaco interno preserva las características espaciales del sistema externo es que los grandes maestros pueden recordar números con 15/16 dígitos y dicen los dígitos hacia atrás y hacia adelante con la misma facilidad, una tarea que no puede ser llevada a cabo fácilmente cuando usamos códigos verbales para recordar dígitos. Finalmente, aunque muestran una memoria maravillosa para dígitos, los que pueden ser registrados en su ábaco mental y así apoyados por el sistema de signos, su memoria para listas de palabras, tales como nombres de flores, no es mejor que la de otros.

Las características de la operación con el ábaco son, en cierto sentido, similares a las de la aritmética escrita: las operaciones se llevan a cabo con dígitos y usan representaciones espaciales como apoyo. Al igual que la aritmética escrita, el control de los valores durante el cálculo no es parte de la práctica cultural. Es más rápido calcular dos veces para ver si se obtiene el mismo resultado, que incluir el control de los valores durante el cálculo. Obviamente, los grandes maestros no hacen errores mientras calculan, mientras que los niños brasileños los hacen cuando usan aritmética escrita. Sin embargo, su falta de monitoreo del cálculo, cuando usan el ábaco, se observa de dos maneras. Primero, si se les da la misma lista de números para sumarlos dos veces, en una fila con una leve modificación (tal como mover el primer número a la última posición de la lista), ellos no reconocen que sólo han sumado los números. Segundo, no simplifican el cálculo usando hechos relacionados. Por ejemplo, si se les pide que multipliquen un número por 99, no lo multiplican por 100 y luego sustraen un número. Esta última técnica se usa cuando la consideración del valor es parte del proceso de cálculo.

De este modo, la aritmética del ábaco, incluso si es efectuada en un ábaco mental, conserva los aspectos espaciales del ábaco, más las fortalezas y debilidades de esta práctica cultural.

En conjunto, el análisis de estas formas diferentes de aritmética indica que el sistema de signos usados durante el cálculo, ya sea representados externamente (dígitos escritos, producciones orales) o internalizados (el ábaco mental), parece transformarse en objetos con los cuales operar. Mientras interactuemos con estos objetos, nuestro proceso de raciocinio es producto de esta interacción; el sistema de signos constriñe lo que podemos lograr con ellos, de un modo que relaciona a los signos como objetos, por encima y más allá de las características del concepto de número.

El rol estructurador de los signos en la formación de conceptos.

Cuando pensamos en situaciones-problema, necesariamente usamos sistemas de signos como mediadores. Cuando se usa un sistema de signos como mediador en una situación de aprendizaje, éste influye en nuestras interacciones en la situación y tipo de concepto que emergerá de estas interacciones. Esto puede ilustrarse considerando que el uso de diferentes sistemas en la misma situación pudiera llevar a esquemas conceptuales diversos. Deseo ilustrar este punto considerando una serie de estudios en el concepto de área (Nunes, Light y Mason, 1993).

Hay dos formas (por lo menos) en los cuales se puede calcular el área de una figura plana. La primera es la más común y se transmite formalmente en la escuela. Involucra tomar la medición de la altura y el ancho de la figura y usar estas medidas en una fórmula que da el área. Por ejemplo, el área de un rectángulo, es la altura por el ancho. Esta forma de calcular el área corresponde al esquema de *producto de medidas* (ver Vergnaud, 1983). En este tipo de concepto de área, dos medidas elementales, altura y ancho, obtenidas en centímetros, por ejemplo, se multiplican para lograr una tercera y nueva medida, el área, en centímetros cuadrados. El segundo esquema del área involucra partir de unidades del área –por ejemplo, centímetros cuadrados–. Si se disponen estas unidades de área en filas y columnas de la figura, el área se calcula multiplicando el número de unidades en una fila por el número de filas. Este enfoque es equivalente a explicar como un esquema de multiplicación denominado (ver Vergnaud, *1983) isomorfismo de medidas*. En esta concepción de área, hay una correspondencia uno-a-muchos entre el número de filas y el número de unidades de área en cada fila. Las dos concepciones difieren en un aspecto muy básico: el concepto de producto de medidas involucra tres variables, mientras que el concepto de isomorfismo de medidas involucra sólo dos.

Este análisis nos lleva a hipotetizar que los niños podrían desarrollar diferentes esquemas para el área, dependiendo de que se les proporcione experiencias de aprendizaje en los que usaran ya sea unidades lineales o de área. En una serie de estudios sobre el área (Nunes, Light y Mason, 1993), se investigó si los niños podían explicar cómo obtenían el área de figuras tales como rectángulos y paralelógramos de diferentes formas, que correspondían al tipo de herramienta de medición que se les proporcionaba. Las herramientas de medición eran, en este caso, sistemas de signos que podían mediar en sus intentos de cuantificar el área.

Pedimos a pares de niños ingleses, de un rango de edad entre 8 y 10 años, que resolvieran algunos problemas de área. Estos pares de alumnos fueron asignados al azar a una de las dos condiciones. En la primera condición, se les daba reglas como su instrumento de medición. En la segunda condición, se les daba ladrillos de 1 cm., pero no en la cantidad suficiente para cubrir completamente las figuras, de modo que no era posible encontrar la solución cubriendo simplemente la figura y contando el número de ladrillos.

Se les presentó a los niños dos figuras, en las cuales el área no podía ser comparada visualmente con exactitud, por ejemplo, dos rectángulos, uno de los cuales era más largo, mientras que el segundo tenía mayor altura. Se le dijo a los niños que las dos figuras eran dibujos de dos murallas, que tenían que ser pintadas por dos amigos, una muralla cada uno. Luego, se les pagaba a los amigos en conjunto por el trabajo de pintura. Antes de dividir el dinero, deseaban saber si habían efectuado la misma cantidad de trabajo y necesitaban comparar la superficie de las dos murallas. No había dudas que lo que interesaba en la comparación era la superficie cubierta. Los alumnos recibieron retroalimentación en los ensayos sucesivos, observando al experimentador cubrir cada figura con papel coloreado cortado de antemano, que podía ser readecuado para cubrir perfectamente ambas figuras, cuando tenían la misma área, pero que cubría sólo una de ellas exactamente cuando las áreas eran diferentes. Este procedimiento fue entendido como una buena prueba de igualdad por todos los niños.

Aunque se les había enseñado a todos los niños sobre el área, en la escuela, podíamos esperar razonablemente que ellos tendrían que desarrollar su comprensión del área después, durante nuestros estudios, porque ya se había documentado (ver Dickson, 1989, por ejemplo) que los niños ingleses en esta etapa no han dominado el área de rectángulos a pesar de la enseñanza. A los niños de nuestro estudio, se les había enseñado inicialmente a cubrir las figuras con unidades de área y a contarlas. Después de esta práctica, tenían una clase formal en la que se les enseñaba la fórmula alto por ancho. Esperábamos que los niños que habían asimilado la fórmula, no tendrían dificultad con los problemas iniciales de nuestro estudio, que involucraba la comparación de rectángulos, pero sí que tendrían que ajustar sus procedimientos cuando se enfrentaran a una figura en forma de U que podía ser descompuesta en rectángulos y también cuando tuvieran que comparar un rectángulo con un paralelógramo.

El desempeño de los alumnos en estos problemas fue diferente, como una función del sistema de signos que tenían disponibles en la situación experimental, reglas versus unidades de área. Se observaron diferencias tanto en términos de número de respuestas correctas y tipo de concepto usado durante la resolución de problemas. Los niños que tenían unidades de área disponibles, se desempeñaron significativamente mejor que aquellos que sólo tenían reglas.

Los muchachos que sólo tenían reglas como instrumento de medición, con mayor probabilidad añadían las medidas en vez de multiplicarlas. Ellos calculaban ya sea el perímetro o el medio perímetro. Algunos alumnos luego tomaron la decisión acerca del tamaño relativo de las figuras sobre la base de esta información; otros alumnos no consideraron que esta información fuera adecuada, pero no sabían qué hacer a continuación; sentían que no podían decidir si los dos muchachos habían hecho la misma cantidad de trabajo. Las respuestas de estos sujetos parecen indicar que ellos conciben las medidas lineales como apropiadas para las evaluaciones lineales. La enseñanza anterior no les ayudaba mucho, porque la herramienta de medición no había sido apropiada para mediar sus interacciones con los objetos, desde su punto de vista. Un tercer grupo de niños desarrolló una estrategia de resolución de problemas que parece muy significativa. Intentaron usar la regla como una unidad de área, colocándola contra uno de los bordes de la figura y moviéndola hacia el otro lado a medida que contaban cuantas reglas cabían en la figura. La regla, como una herramienta de medición lineal y convencional, era dejada de lado y considerada como una unidad de área no convencional. El análisis del desempeño de estos niños muestra que sus dificultades con el concepto de área estaban relacionadas con el sistema de signos que ellos tenían para mediar sus interacciones. Un sistema que proporciona medidas lineales no parecía un buen medio para ese fin. Incluso los niños que podían resolver con éxito los problemas de comparar rectángulos usando el problema de alto por ancho, tuvieron dificultades en comparar un rectángulo y un paralelógramo. Ellos no calcularon que la altura y el lado del paralelógramo no es lo mismo. Usaron un concepto de "lado por lado", que, al aplicarse al paralelógramo, produce una solución incorrecta.

Los alumnos que tenían las unidades de área como instrumento de medición descubrieron con frecuencia una fórmula para resolver el problema; el número de ladrillos en una fila por el número de filas, usado con éxito para resolver la escasez de ladrillos. Esta fórmula fue modificada más fácilmente para solucionar el problema del área del paralelógramo que la fórmula alto por ancho que les habían enseñado. La altura del paralelógramo y el número de filas son la misma medida. El relativo éxito de estos alumnos, en comparación con aquellos que tenían reglas, no puede explicarse por una mejor comprensión del área, porque ellos habían sido asignados al azar a sus grupos. Esto nos lleva a concluir que su éxito fue posible debido a que la herramienta de medición, que medió sus interacciones en la situación problema, tuvo un efecto en estas interacciones, que resultó en una concepción operacional diferente de área.

Para resumir, el esquema de área de los niños, en esta serie de problemas fue claramente influido por la herramienta de medición proporcionada. Los niños que recibieron unidades de área inventaron una fórmula "número de ladrillos en una fila por el número de filas". Los niños que habían recibido reglas pueden haber usado una fórmula "lado por lado", aprendida o desarrollada previamente, para calcular el área de los paralelógramos. Cada sistema de signos pareció arrojar luz sobre aspectos particulares del concepto, en vez de otros.

Debe enfatizarse, sin embargo, que el rol estructurador del sistema de signos en la formación de conceptos no puede ser visto de un modo determinista. Los sujetos tienen sus propias ideas sobre lo que desean lograr en la situación y pueden hacer uso de una herramienta de un modo inesperado, cuando el sistema mediador mismo es considerado. En estos experimentos, los niños que deseaban confiar en unidades de área usaron la regla como unidad de área, más que un instrumento para obtener medidas lineales. Así, los sistemas de signos desempeñan un rol estructurador en las interacciones del sujeto, como mediadores del razonamiento, pero no determinan el producto de aprendizaje sin que tomemos en cuenta el propio rol del sujeto en la situación.

4. Valores asociados con el aprendizaje de la matemática dentro y fuera de la escuela

El interés del impacto de los valores en el conocimiento cognitivo en general y el desempeño matemático en particular, se desarrolló en forma muy lenta en la psicología. Fue sólo en las dos últimas décadas que comenzó a quedar en claro que la conciencia de cómo se representa socialmente un objeto de conocimiento, tiene impacto directo en el desarrollo del conocimiento del niño. “No sólo aprendemos a resolver problemas. También aprendemos que vale la pena resolver problemas y que lo que cuenta es una solución elegante, más que una simplemente aceptable”(Goodnow, 1990, p. 259).

Me interesé por primera vez en este punto cuando, con mis colegas Analucia Schliemann y David Carraher, yo enfrenté el dilema del éxito de los niños brasileños resolviendo problemas en las calles y su fracaso al resolverlos en la escuela. Aunque la diferencia cognitiva podía explicarse por el uso de diferentes sistemas de signos como mediadores del razonamiento, parecía problemático que los niños recurrieran a los signos escritos, cuando estaban muy conscientes que su desempeño era mucho mejor en la aritmética oral. Observaciones tales como “No puedo hacerlo en papel, sólo puedo hacerlo en mi cabeza”, no eran poco frecuentes y correcciones espontáneas de los resultados escritos sobre la base de estrategias orales se observaron a menudo, por lo menos en nuestro ambiente experimental.

¿Por qué la gente que se sabe más competente en la aritmética oral que en la escrita, elige resolver problemas en la aritmética escrita? Los profesores a los que se les hizo la pregunta dieron una explicación en forma consistente: en la escuela, los profesores estarían desconfiados al ver un número como respuesta a un problema sin el cálculo escrito, porque el alumno podría simplemente haber copiado la respuesta de un compañero. Esta línea de explicación era claramente social más que cognitiva y se relacionaba con la naturaleza de las escuelas como institución: la naturaleza de las interacciones sociales en la escuela es tal que no se resuelve un problema por el bien del alumno, debido a su interés personal en él, sino que por el bien del profesor, de modo que éste pueda verificar si el aprendizaje ha ocurrido o está ocurriendo (ver T. Nunes Carraher, 1990). Por esta razón, los métodos y procedimientos se transforman en metas, más que en medios en la instrucción. Fuera de la escuela, por contraste, los métodos son justamente eso, medios para resolver problemas, y esto permite una mayor flexibilidad (Lave, 1988).

El carácter social del aprendizaje que ocurre en la clase se ha transformado en el foco de muchas investigaciones. Edwards y Mercer (1987), por ejemplo, analizaron las interacciones alumno-profesor en clases y destacaron el doble significado de las comunicaciones del profesor: proporcionar, pero también validar, conocimiento. Los profesores no sólo proporcionan conocimiento, sino que también enseñan lo que se considera digno de saber. Los profesores validan formas particulares de conocimiento en clases y excluyen otras; los niños aprenden cuáles son las preguntas buenas y cuáles son las tontas y también aprenden que no todas las respuestas, incluso las correctas, son valoradas igualmente por el profesor. En otras palabras, las aulas son escenarios para imprimir carácter social a las estructuras de conocimiento.

El carácter social de las prácticas de numeración fue documentado en detalle en una comunidad rural de Brasil, por de Abreu, Bishop y Pompeu (1996). Haciendo un seguimiento del trabajo en la escuela y en la matemática de la calle, ellos deseaban saber si profesores y alumnos en la escuela primaria atribuían diferentes valores a estas dos formas de práctica de numeración y si había una relación entre su valorización de estas prácticas y el éxito en la matemática escolar. Las prácticas se identifican fácilmente, porque recurren a diferentes sistemas de representación -la matemática callejera es oral, la escolar es escrita- y ellas involucran diferentes procedimientos para calcular. De Abreu et al. observaron que profesores y alumnos por igual consideraban la matemática callejera como "práctica" y la escolar, como "teórica". Ellos reconocían a menudo que ambas formas de numerar podían llevar a resultados correctos, pero valoraban las prácticas diferentemente. Los profesores se daban cuenta que la matemática callejera podía ser eficaz e incluso impresionante (una profesora reconoció que su propio padre analfabeto podía calcular mejor usando matemática callejera que ella misma con su matemática escolar), pero ellos pretendían enseñar sólo matemática escolar: las producciones escritas eran percibidas como camino al éxito en el sistema educacional. La actitud de los alumnos variaba: algunos alumnos consideraban que la matemática callejera podía llevar a buenos resultados, pero que no era "la forma correcta" de sumar, mientras que otros la valoraban como altamente efectiva. Se observó la misma diversidad con respecto a la matemática escolar: algunos alumnos la consideraban menos efectiva que la matemática callejera, mientras otros la consideraban importante, junto con o en oposición a la matemática de la calle. De Abreu et al. observaron tanto a alumnos jóvenes (grado 3^0) como a mayores (grado 5°). Entre los alumnos mayores en particular, el éxito en la matemática escolar estaba vinculado a su valorización de esta práctica, con o sin desvalorización de la matemática callejera. Su desempeño en esta última, sin embargo, no tenía relación con su éxito o fracaso en la matemática escolar. Así, no había relación entre los dos tipos de conocimiento a nivel cognitivo sino que había una clara asociación entre la valorización de la matemática escolar y su aprendizaje.

Schubauer-Leoni y Perret-Clermont (1996) proponen que se requiere un nuevo enfoque del análisis de la interacción en sala de clases, dado que el conocimiento es socialmente caracterizado en el aula. En vez del modelo bipolar que nos es familiar, en el que se consideran interacciones profesor-alumno o alumno-alumno, debiéramos pensar en términos de un modelo tripolar, en el que las interacciones a ser consideradas son entre el profesor, el alumno y un objeto de conocimiento que es construido socialmente. Este enfoque tripolar, ya introducido en el ámbito de la enseñanza de la matemática por Brousseau (1986) y Chevallard (1988), asume un significado levemente diferente cuando los aspectos sociales del aprendizaje son considerados en la psicología: el objeto de conocimiento no es simplemente la matemática a aprender, sino que también las representaciones sociales de la misma que los alumnos desarrollan en la clase. Esta representación social define lo que significa saber y no saber algunos tópicos particulares en la matemática.

Cuando consideramos las representaciones de los alumnos sobre matemática, encontramos que, para mucha gente, ser capaz de resolver un problema no es prueba suficiente de dominar ese aspecto particular de la matemática: en efecto, deben considerar su propio desempeño como prueba de su falta de conocimiento, porque no se conforma a la representación de buen desempeño desarrollada en la escuela. Recientemente, nos reunimos con integrantes de un equipo de dardos que unánimemente afirmaron que todos eran malos para la matemática (ver Nunes y Bryant, 1996) Uno de ellos nos ofreció la siguiente prueba de su conocimiento deficiente: debido a que no sabía multiplicar, cuando tenía que realizar una multiplicación, la hacía en base a los números usados en el juego de dardos. Por ejemplo, si tenía que resolver algo que involucrara 7 x 17, él solía pensar en términos de triple 17 (51) más triple 17 más 17. Su propio análisis de este proceso es que lo hace así porque "no sabe multiplicar"; desde una perspectiva diferente, esta solución podría ser vista como un uso creativo de la propiedad distributiva. Muchos de nosotros que pensamos que sabemos multiplicar bien, podríamos quedar atascados si se nos pidiera resolver el problema rápidamente de este modo oral.

Lo que nos muestran estos ejemplos es que, implícito, en el "contrato didáctico" (Brousseau, 1986) hay también una valoración. El contrato didáctico no es sólo un sistema de expectativas recíprocas y específicas en relación al conocimiento enseñado, sino que también una validación de una forma particular de conocimiento. Pero esta validación no ocurre sólo en la clase. Como enfatizan SchubauerLeoni y Perret-Clermont (1996), los profesores en sí no son completamente libres para decidir lo que cuenta como conocimiento en la clase: el contrato didáctico está a su vez bajo la regulación de un meta-contrato institucional, que está definido por las representaciones de las matemáticas contenidas en el sistema escolar a través de un curriculum nacional, textos y formas de evaluación estandarizadas, por ejemplo. Schubauer-Leoni (en Schubauer-Leoni y Perret-Clermont, 1996) examinaron el impacto del ambiente institucional en la resolución de problemas de los alumnos, comparando la formulación escrita del mismo problema de cálculo ya sea en la clase, donde la tarea era hecha colectivamente, como de costumbre pero con una respuesta escrita individual de cada alumno, o fuera de la clase, en una situación cara a cara con un experimentador. Las respuestas escritas de los alumnos(8-9 años de edad; 2º primario) variaban como función de los ambientes: en la clase, en presencia de su propio profesor, los alumnos usaban escritura aritmética convencional con mayor frecuencia, mientras que fuera de la clase, cara a cara con un adulto desconocido, el lenguage natural y el dibujo fueron más utilizados para resolver estos problemas de cálculo.

En resumen: la socialización de la mente que ocurre en la clase involucra no sólo la socialización de significados y el aprendizaje de sistemas colectivos de signos, sino que también la categorización social del conocimiento con valores. El valor simbólico agregado a los procedimientos aprendidos en la clase, resulta a menudo en una devaluación implícita o explícita de los procedimientos aprendidos fuera de la clase. El conocimiento aprendido fuera de la clase a menudo es minimizado, tratado como matemática menor.

5. Implicancias para la enseñanza de la matemática en una sociedad multicultural

En este artículo, se han presentado diferentes prácticas culturales que involucran conocimiento matemático, las que coexisten en la misma sociedad y, a menudo, en las vidas de los mismos niños. Esto significa que cualquier sociedad es, por consiguiente, multicultural: prácticas culturales diferentes, que involucran razonar con número y espacio, emergerán con valores diferentes en las vidas de la mayoría de la gente. Sin embargo, como lo señala Goodnow (1990), se requiere conocer sólo algunas cosas y se nos permite conocer otras, dependiendo de nuestra posición en la sociedad. Habiéndome criado en Brasil con poca experiencia en la economía informal, donde ocasionalmente participaba como cliente, se me permitió la “ignorancia selectiva” a la cual se refiere Goodnow respecto a la aritmética oral. Fue sólo después de un doctorado en psicología y algunos años de trabajo como investigador que yo aprendí a enfrentar la matemática callejera, grabando lo que los sujetos decían mientras me vendían cosas en la calle, transcribiendo esos registros y tratando de interpretarlos posteriormente. Aprendí mucho de los supervisores sobre proporciones y de los granjeros sobre porcentajes. También aprendí que la mayoría de los profesores y la mayoría de los investigadores no saben mucho sobre la aritmética oral y se permiten la misma ignorancia selectiva que yo me había permitido antes que me enseñaran los expertos de la calle. Si nos hubieran pedido que calculáramos 17 x 7, no podríamos haber hecho lo que los jugadores de dardos hacían tan bien. Sin embargo, sólo algunas de las prácticas culturales a que somos expuestos son tratadas como dignas de conocerse por el sistema escolar: sólo éstas están destinadas a ser matemática cuando sean evocadas por los profesores en la clase, durante el proceso de socialización de significados y transmisión del sistema de signos.

Una solución fácil podría ser decir que la matemática de la calle se mantiene fuera de la escuela porque no ofrece una base sólida para aprendizajes posteriores. Sin embargo, el trabajo en el Instituto Freudenthal en los Países Bajos (ver, por ejemplo, Streefland, 1990b), donde las soluciones intuitivas de los alumnos son tomadas en serio como un punto de partida para el aprendizaje, parece no apoyar esta especulación. Lamon (1994) también ha mostrado lo fructífero que es apelar a la matemática de la calle en la clase, como un buen punto de partida para aprender fracciones.

El proceso de alienación de los aprendices por la exclusión de sus formas de conocimiento, ha sido documentado no sólo por de Abreu en la clase de matemática, sino que también por varios investigadores en el dominio de la alfabetización (ver, por ejemplo, Kumar, 1993). Si los valores y prácticas del hogar chocan con las que se enfrentan en el colegio, se coloca a los aprendices en una posición difícil, al tener que optar por una o la otra, con consecuencias desafortunadas en cualquier sentido.

¿Qué opción queda para los profesores? Deseo sugerir que la ignorancia selectiva no debe ser aceptada tan fácilmente. A fin de proseguir con la socialización de la mente en la clase, necesitamos conocer una variedad de diferentes prácticas matemáticas de los diferentes grupos sociales. Estas prácticas diferentes pueden ofrecer una visión de una diversidad de esquemas de razonamiento, muchos de los cuales no son corrientemente usados para ventaja de los aprendices en la clase. Es probable que pueda ganarse mucho en flexibilidad de razonamiento, si una mayor variedad de esquemas de raciocinio pudieran conectarse claramente con los signos matemáticos, más bien que tratar de defender el enfoque actual, de tratar de desarrollar una relación lineal entre diferentes partes del curriculum.

Referencias

BACHELARD, G. (1938): *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: J. Vrin.

BROUSSEAU, G. (1986): Le rôle central du contrat didactique. Paper presented at ICME 5, Adelaide, Australia.

CASSIRER, E. (1950): *The problem of knowledge. Philosophy, Science, and History· since Hegel*. New Haven: Yale University Press.

CHEVALLARD, Y. (1988): *La transposition didactique*. Paris: PUF.

DE ABREU, G.M.C. (1994): *The relationship between honre and school mathematics in a farming community in rural Brazil*. University of Cambridge: Unpublished Phd thesis.

DE ABREU, G.M.C., BISHOP, A., and POMPEU, G. (1996): What children and teachers count as mathematics. In T. Nunes and P.E. Bryant (Eds). *Teaching and learning mathematics: An international perspective*. Hove, UK: Erlbaum, in press.

DESLI, D. & NUNES, T. (1996): Young children's understanding of fractions. Research report in preparation.

DICKSON, L. (1989): Area of a rectangle. In D. C. Johnson (Ed) *Children's Mathematical Frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Windsor: NFER Nelson.

DOUADY, R. (1996): Didactic engineering. In T. Nunes & P. E. Bryant (Eds.) *Teaching and learning mathematics: An international perspective*. Hove, UK: Erlbaum, in press.

EDWARDS, D. & MERCER, N. (1987): *Common knowledge. The development of understanding in the classroom*. London: Routledge.

FRYDMAN, O. and BRYANT, P.E. (1988): Sharing and the understanding of number equivalence by young children. Cognitive Development, 3, 323-339.

GIORDAN, A. (1989): Vers un modèle didactique d'apprentissage allosterique. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.). *Construction des savoirs. Obstacles & conflits* (pp. 240-257). Ottawa: Editions Agence d'ARC.

GLICK, J. (1996): Intellectual and manual labor: Implications for developmental theory. In L. M. W. Martin, K. Nelson, & E. Tobach (Eds.) *Sociocultural psychology. Theory and practice of doing and knowing* (pp. 357-392). New York: Cambridge University Press.

GOODNOW, J.J. (1990): The socialization of cognition: what's involved? In (Eds.) J.W. Stigler, R.A. Shweder and G. Herdt: *Cultural Psychology: essays on comparative human development*. pp. 259-286. Cambridge: Cambridge University Press.

HATANO, G. (1996): Learning arithmetic with an abacus. In T. Nunes and P.E. Bryant (Eds). *Teaching and learning mathematics: An international perspective*. Ho^v^e, UK: Erlbaum, in press.

HUDSON, T. (1983): Correspondences and numerical differences between sets. *Child Development, 54,* 84-90.

KARMILOFF-SMITH, A. (1993): *Beyond modularity*. New York: Cambridge University Press.

KIEREN, T. (1994): Multiple Views of Multiplicative Structures. In (Eds.) G. Harel & J. Confrey: *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 389-400). Albany, New York: State University of New York press.

KUHN, T. (1970): *The structure of scientif revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.

KUMAR, K. (1993): Literacy and primary education in India. In P. Freebody & A. R. Welch (Eds.), *Knowledge, culture, and power: International perspectives on literacy as policy, and practice* (pp. 102-141). London: Falmer Press.

LAMON, S.J. (1993): Ratio and Proportion: Children's Cognitive and Metacognitive Processes. In (Eds.) T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg: *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 131-156). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

LAVE, J. (1988): *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press. A. Romberg: *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 131-156). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

MACLEAN, M. et al. (1996): Understanding the numeration system: studies with English and Welsh children. Poster presented at the annual session of the British Psychological Association, Developmental section, Oxford.

MARTON, F. and NEUMAN, D. (1990): Constructivism, phenomenology and the origin of arithmetic skills. In (Eds.) L. Steffe and T. Wood: *Transferring children's mathematics education: international perspectives*. pp. 62-75. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass.

MIURA, I.T., OKAMOTO, Y., KIM, C.C., CHANG, C.-M., STEERE, M. and FAYOL, M. (1994): Comparisons of children's cognitive representation of number: China, France, Japan, Korea, Sweden and the United States. *International Journal of Behavioral Development, 17,* 401-411.

NUNES CARRAHER, T. (1990): Negotiating the results of mathematical

computations. *European Journal of Educational Research,* 637-646.

NUNES, T. (1992): Ethnomathematics and everyday cognition. In D. Grouws (Ed.) *Handbook of research in mathematics education*. Washington, DC: National Council of Mathematics Teachers.

NUNES, T. (1993): In R. Davis & C. Maher (Eds).

NUNES, T. & BRYANT, P. E. (1996): *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.

NUNES, T., LIGHT, P., & MASON, J. (1993): Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction,* 3, 39-54.

NUNES, T. MORENO, C. (1996): Solving word problems with diferent mediators: how do deaf children perform? Paper presented at the annual meeting of PME, Valencia, Spain.

NUNES, T., SCHLIEMANN, A.-L. and CARRAHER, D. (1993): *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.

PIMM, D. (1987): *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms*. London: Routledge.

SAXE, G. B. (1991): *Culture and cognitive development: studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. & PERRET-CLERMONT, A. N. (1996): Social Interactions and Mathematics Learning. In T. Nunes – P. E. Bryant

(Eds.). *Teaching and learning mathernatics: An international perspective*. Hove, UK: Erlbaum, in press.

SCRIBNER, S. (1986): Thinking in action: some characteristics of practical thought. In (Eds.) R.1. Sternberg and R.K. Wagner: *Practical Intelligence*. pp. 13-30. Cambridge: Cambridge University Press.

STREEFLAND, L. (1990a): Free productions in Teaching and Learning Mathematics. In (Eds.) K. Gravemeijer, M. van den Heuvel and L. Streefland: *Contexts Free Production Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*. pp. 33-52. Utrecht Netherlands: Research group for Mathematical Education and Educational Computer Centre - State University of Utrecht.

STREEFLAND, L. (1990b): Realistic Mathematics Education: what does it mean? In (Eds.) K. Gravemeijer, M. van den Heuvel and L. Streefland: *Free Production Tests and Geometry in Realistic mathematics Education*. pp. 79-90. Utrecht: Research Group for Mathematical Education and Educational Computer Centre, State University of Utrecht.

VERGNAUD, G. (1983): Multiplicative structures. In (Eds.) R. Lesh and M. Landau: *Acquisition of mathematics concepts and processes*. pp. 128-175. London: Academic Press.

WALKERDINE, V. (1988): *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge.